Der Normalisator einer subnormalen Untergruppe

Von HELMUT WIELANDT in Tübingen (Deutschland)

Ladislaus Rédei zum 60. Geburtstag am 15. November 1960

§ 1. Übersicht

G sei eine endliche Gruppe; A sei eine subnormale Untergruppe von G, also erreichbar durch eine mit G beginnende absteigende Normalkette. Man weiß dann, daß der Normalisator $\mathbf{N}A$ von A in G „groß" ist. Es versteht sich von selbst, daß aus $A \neq G$ auch $A \neq \mathbf{N}A$ folgt. Darüber hinaus kennt man verschiedene Aussagen über die Größe von $\mathbf{N}A$; sie sind in § 2 zusammengestellt.

Die folgende Untersuchung bewegt sich in der gleichen Richtung, aber unter Verwendung eines neuen Hilfsmittels: sie berücksichtigt den Anteil der einzelnen Primzahlen an A. Diesen kann man auf zwei Arten erklären. Man kann zu jeder Primzahl p entweder eine p-Sylowgruppe A_p wählen, oder man kann des Erzeugnis pA aller p-Sylowgruppen von A bilden. Zwischen den Normalisatoren $\mathbf{N}pA$ und $\mathbf{N}A$ ergibt sich ein einfacher Zusammenhang (3. 5. 1), nämlich $\mathbf{N}A = \bigcap \mathbf{N}pA$. Daher beschäftigen wir uns eingehend mit $\mathbf{N}pA$. Dieser Normalisator hängt eng mit $\mathbf{N}A_p$ zusammen; die in einer früheren Arbeit [4] entwickelte Methode der Projektion von A in eine p-Sylowgruppe von G gibt genaue Aufschlüsse. Das Hauptgewicht liegt auf der Frage, wann pA eine normale oder sogar charakteristische Untergruppe von G oder von pG ist. Ein einfaches Ergebnis sei als Beispiel genannt:

Satz 1.1. *Sei A subnormal in G, und sei A_p eine p-Sylowgruppe von A.*

(a) *Genau dann ist pA normal in pG, wenn A_p normal ist in allen denjenigen p-Sylowgruppen von G, welche A_p enthalten.*

(b) *Genau dann ist pA eine charakteristische Untergruppe von G, wenn für jede Gruppe Γ von Automorphismen von G, für welche das Erzeugnis A_p^Γ der Bilder von A_p eine p-Gruppe ist, $A_p^\Gamma = A_p$ gilt.*

Die Voraussetzung von (a) ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn eine p-Sylowgruppe von G abelsch ist; und die Voraussetzung von (b) dann, wenn A_p in jeder größeren p-Untergruppe von G charakteristisch ist.

Das Hauptergebnis dieser Note ist ein erheblich schärferer Satz (5. 3); er ist zugleich insofern allgemeiner, als in ihm π-Hallgruppen anstelle der p-Sylowgruppen betrachtet werden.

Bezeichnungen. $A, B, \ldots$ sind Untergruppen einer endlichen Gruppe G. Erzeugnis und Durchschnitt bezeichnen wir mit $\cup$ und $\cap$, das neutrale Element von G mit 1. Wir schreiben $b^{-1}Ab = A^b$ und $\bigcup_{b \in B} A^b = A^B$.

Mit $\mathbf{n}A, \mathbf{s}A, \mathbf{u}A$ bezeichnen wir der Reihe nach die Menge der normalen, subnormalen, aller Untergruppen von A. Für jede Teilmenge $\mathbf{m} \subseteqq \mathbf{u}A$ bezeichne $\mathbf{N}\mathbf{m}$ den Durchschnitt der (in G zu bildenden) Normalisatoren $\mathbf{N}M$ $(M \in \mathbf{m})$. Unter der normalen Hülle von A in G verstehen wir die Gruppe $A^G = \bigcap N$ $(A \subseteqq N \in \mathbf{n}G)$; die subnormale Hülle von A in G bezeichnen wir mit $A^{\cdot G}$; sie ist durch $A^{\cdot G} = \bigcap S$ $(A \subseteqq S \in \mathbf{s}G)$ erklärt.

Mit p, q bezeichnen wir stets Primzahlen, mit π, ϱ Mengen von Primzahlen. Für jede natürliche Zahl n verstehen wir unter n_π den Anteil von π an n: es ist $n_\pi = \Pi' p^\alpha$ $(p \in \pi)$, wenn Πp^α die Primfaktorzerlegung von n ist. Die Ordnung von A bezeichnen wir mit $|A|$, den Index von A in G mit $|G:A|$. Wie üblich, heißt A eine π-Gruppe, wenn $|A| = |A|_\pi$ ist; und A heißt eine π-Hallgruppe von G, wenn $|A| = |G|_\pi$ ist. Die p-Hallgruppen sind die p-Sylowgruppen. Das Erzeugnis aller π-Untergruppen von A bezeichnen wir ständig mit πA.

§ 2. Bekannte Ergebnisse

Über den Normalisator einer subnormalen Untergruppe sind bisher im wesentlichen drei Sätze bekannt.

2. 1. *Seien $A, B \in \mathbf{s}G$; B enthalte A nicht; A enthalte nur einen einzigen maximalen Normalteiler M, und die Faktorgruppe A/M sei nicht abelsch. Dann ist $B \subseteqq \mathbf{N}A$* [3, Satz 20].

2. 2. *Seien $A, B \in \mathbf{s}G$; für keinen maximalen Normalteiler von A sei die Faktorgruppe isomorph zu einer der Kompositionsfaktorgruppen von B bis $A \cap B$ (in irgendeiner durch $A \cap B$ gelegten Kompositionsreihe von B). Dann ist $B \subseteqq \mathbf{N}A$* [3, Satz 25].

2. 3. *Sei A subnormal in G; sei B entweder ein minimaler Normalteiler von G oder eine einfache, nicht abelsche, subnormale Untergruppe von G. Dann ist $B \subseteqq \mathbf{N}A$* [5, Satz 1].

Außer diesen Ergebnissen werden wir die folgenden bekannten Tatsachen über subnormale Untergruppen und Hallgruppen benutzen.

2.4. *Seien* $A, B \in \mathbf{s}G$. *Dann ist* $A \cup B \in \mathbf{s}G$ *und* $A \cap B \in \mathbf{s}G$. *Jede Kompositionsfaktorgruppe zwischen* $A \cup B$ *und* B *ist zu einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen* A *und* $A \cap B$ *isomorph; daher ist jede Kompositionsfaktorgruppe von* $A \cup B$ *zu einer von* A *oder* B *isomorph* [3, Sätze 4, 7, 9].

2.5. $(\pi \cup \varrho) A = \pi A \cup \varrho A$, *wenn* $A \in \mathbf{u} G$ [4, Satz 1.2].

2.6. $\pi(A \cup B) = \pi A \cup \pi B$, *wenn* $A, B \in \mathbf{s}G$ [4, Satz 1.3].

2.7. *Sei* $A \in \mathbf{s}G$ *und* G_π *eine* π*-Hallgruppe von* G. *Dann ist der Durchschnitt* $A_\pi = A \cap G_\pi$ *eine* π*-Hallgruppe von* A. *Wenn außerdem* $B \in \mathbf{s}G$ *ist, so gilt* $(A \cap B)_\pi = A_\pi \cap B_\pi$ *und* $(A \cup B)_\pi = A_\pi \cup B_\pi$ [6, Satz 2.5].

§ 3. Zusammenhänge zwischen $\mathbf{N}A$ und $\mathbf{N}\pi A$

Wie stets sei π eine Menge von Primzahlen, πA das Erzeugnis aller π-Untergruppen von A. Bevor wir die Normalisatoren $\mathbf{N}A$ und $\mathbf{N}\pi A$ in Verbindung bringen, schicken wir drei Bemerkungen voraus.

3.1. πA *ist der Durchschnitt derjenigen* $B \in \mathbf{s}A$, *für welche der Index* $|A:B|$ *keinen Primteiler aus* π *enthält.*

Beweis. Ist $B \in \mathbf{u}A$ und $|A:B|$ durch keine Primzahl aus π teilbar, so enthält B zu jedem $p \in \pi$ eine p-Sylowgruppe von A. Ist überdies $B \in \mathbf{s}A$, so enthält B sogar alle p-Sylowgruppen von A; das folgt für $B \in \mathbf{n}A$ aus der Konjugiertheit der Sylowgruppen und dann für $B \in \mathbf{s}A$ durch Induktion. Die in 3.1 genannten Gruppen B sind also diejenigen Subnormalteiler von A, welche für jedes $p \in \pi$ alle p-Sylowgruppen von A enhalten. Ihr Durchschnitt D hat dann die gleiche Eigenschaft, daher ist $\pi A \subseteq D$. Daß umgekehrt $D \subseteq \pi A$ ist, versteht sich von selbst; denn πA ist eine der betrachteten Gruppen B.

3.2. *Genau dann ist* $\pi A = A$, *wenn der Index jedes maximalen Normalteilers von* A *einen Primfaktor aus* π *enthält.*

Beweis. Ist $\pi A = A$, so ist nach 3.1 der Index jedes maximalen Normalteilers von A durch eine Primzahl aus π teilbar. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gilt sie für jeden echten Normalteiler von A, aber nicht für πA. Daher ist $\pi A = A$.

3.3. *Sei* $A \in \mathbf{s}G$ *und* $b \in B \subseteq G$. *Dann gilt* $\pi(A^b) = (\pi A)^b$ *und* $\pi(A^B) = (\pi A)^B$.

Man darf also kurz πA^b und πA^B schreiben.

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, daß die Abbildung $a \to a^b$ ein Isomorphismus ist; die zweite ergibt sich durch wiederholte Anwendung von 2. 6.

Wir untersuchen nun die Zusammenhänge zwischen den Normalisatoren $\mathbf{N}\pi_i A$ für beliebige Mengen π_i von Primzahlen.

3. 4. *Sei* $A \in \mathbf{u}G$. *Dann ist* $\mathbf{N} \bigcup \pi_i A = \bigcap \mathbf{N}\pi_i A$.

Beweis. Es ist offenbar $\pi_j A = \pi_j(\bigcup \pi_i A)$. Daher ist $\pi_j A$ eine charakteristische Untergruppe von $\bigcup \pi_i A$. Also gilt in der Behauptung von 3. 4 das Zeichen $\subseteq$. Da andererseits die $\pi_i A$ die Gruppe $\bigcup \pi_i A$ erzeugen, gilt auch das Zeichen $\supseteq$.

Nach 3. 4 kann $\mathbf{N}A$ bestimmt werden, wenn man $\mathbf{N}\pi_i A$ für hinreichend große π_i kennt. Was unter „hinreichend groß" zu verstehen ist, ergibt sich mittels 2. 5 und 3. 2:

Satz 3. 5. *Es seien* $\pi_1, \pi_2, \ldots$ *Primzahlmengen derart, daß der Index jedes maximalen Normalteilers von* A *mindestens einen Primfaktor aus* $\bigcup \pi_i$ *enthält. Dann ist* $\mathbf{N}A = \bigcap \mathbf{N}\pi_i A$.

Die Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn $\bigcup \pi_i$ alle Primteiler von $|A|$ enthält. Daher gilt

3. 5. 1. *Es ist* $\mathbf{N}A = \bigcap \mathbf{N}pA$, *wenn* p *alle Primteiler von* $|A|$ *durchläuft.*

Teilaussagen über $\mathbf{N}A$ kann man mitunter schon aus Kenntnis eines Normalisators $\mathbf{N}\pi A$ gewinnen; so kann man 2. 2 verallgemeinern:

Satz 3. 6. *Sei* $A \in \mathbf{s}G$, $B \in \mathbf{u}G$. *Es sei entweder* $B \in \mathbf{s}G$ *oder* $AB = BA$. *Sei* $B \subseteq \mathbf{N}\pi A$. *Für keinen maximalen Normalteiler* M *von* A *mit* $|A:M|_\pi = 1$ *sei* A/M *isomorph zu einer der Kompositionsfaktorgruppen von* B *bis* $A \cap B$. *Dann ist* $B \subseteq \mathbf{N}A$.

Beweis. Indem wir von G zu $A \cup B$ übergehen, können wir annehmen, daß πA in G normal ist; und indem wir zur Faktorgruppe nach πA übergehen, können wir auch $\pi A = 1$ annehmen. Dann ist keine einfache Faktorgruppe von A zu einer der Kompositionsfaktorgruppen F von B bis $A \cap B$ isomorph. Aber jede Kompositionsfaktorgruppe von G bis A ist zu einer solchen Gruppe F isomorph, denn sie stimmt mit einer Kompositionsfaktorgruppe zwischen B und $A \cap B$ überein (das ist, wenn $B \in \mathbf{s}G$, eine Teilaussage von 2. 4; im Fall $AB = BA = G$ ist es leicht unmittelbar einzusehen). Also jede einfache Faktorgruppe von A ist verschieden von jeder Kompositionsfaktorgruppe zwischen G und A. Hieraus folgt nach 2. 4 leicht, daß A in G charakteristisch ist; insbesondere ist $B \subseteq \mathbf{N}A$, wie behauptet.

Die beiden letzten Sätze führen die Untersuchung von $\mathbf{N}A$ für subnormale A auf die Untersuchung geeigneter Normalisatoren $\mathbf{N}\pi A$ zurück.

§ 4. Der Normalisator von πA

Seien $A \in \mathbf{s}G$ und eine Primzahlmenge π gegeben. Wir suchen Bedingungen, unter denen $\mathbf{N}\pi A$ groß ist. Ein erstes Ergebnis können wir durch die eben benutzte Schlußweise erhalten:

Satz 4. 1. *Sei $A \in \mathbf{s}G$, $B \in \mathbf{u}G$. Es sei entweder $B \in \mathbf{s}G$ oder $AB = BA$. Der Index $|B : A \cap B|$ enthalte keinen Primteiler aus π. Dann ist πA eine charakteristische Untergruppe von $A \cup B$, nämlich $\pi A = \pi(A \cup B)$; insbesondere ist $B \subseteq \mathbf{N}\pi A$.*

Beweis: Jeder Kompositionsfaktor zwischen $A \cup B$ und A ist, wie der Beweis von 3. 6 gezeigt hat, auch ein Kompositionsfaktor zwischen B und $A \cap B$. Also enthält $|A \cup B : A|$ keinen Primteiler aus π. Daher enthält auch $|A \cup B : \pi A|$ keinen Primteiler aus π. Da $\pi A \in \mathbf{s}(A \cup B)$ ist, zeigt 3. 1, daß $\pi(A \cup B) \subseteq \pi A$ ist. Die umgekehrte Beziehung ist trivial.

Verwandte Ergebnisse unter schwächeren Voraussetzungen können wir mit Hilfe der „Projektion von $\mathbf{s}G$ in Hallgruppen" erhalten, die durch 2. 7 beschrieben wird. Hierfür müssen wir die Existenz einer π-Hallgruppe in G voraussetzen. Das bedeutet für die Anwendung keine starke Einschränkung; denn es kommt vor allem der Fall in Betracht, daß π aus einer einzigen Primzahl besteht, und dann ist die Existenz der Hallgruppe durch den Satz von Sylow gesichert.

Ständige Voraussetzung. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit G_π stets eine fest gewählte π-Hallgruppe von G; für jedes $A \in \mathbf{s}G$ setzen wir $A_\pi = A \cap G_\pi$.

Nach 2. 7 ist A_π eine π-Hallgruppe von A. Zwischen A_π und πA besteht ein enger Zusammenhang:

4. 2. *Es ist $\pi A = A_\pi^{::A} = A_\pi^{::G}$ und $A_\pi = \pi A \cap G_\pi$.*

Beweis. Da $|A : A_\pi|$ keinen Primteiler aus π enthält, gilt das Gleiche für $|A : A_\pi^{::A}|$. Daher ist $\pi A \subseteq A_\pi^{::A}$. Andererseits haben wir $A_\pi \subseteq \pi A \in \mathbf{s}A$ nach Definition von πA; also ist auch $\pi A \supseteq A_\pi^{::A}$. Ferner ist $A_\pi^{::A} = A_\pi^{::G}$; denn wegen $A_\pi \subseteq A_\pi^{::G} \in \mathbf{s}G$ haben wir $A_\pi^{::A} \subseteq A_\pi^{::G}$, und andererseits ist wegen $\mathbf{s}A \subseteq \mathbf{s}G$ natürlich $A_\pi^{::G} \subseteq A_\pi^{::A}$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen; die zweite folgt unmittelbar aus der Definition von A_π und πA.

Wir können nun einen Zusammenhang zwischen $\mathbf{N}A_\pi$ und $\mathbf{N}\pi A$ herstellen:

Satz 4. 3. *Es ist $\mathbf{N}A_\pi \subseteq \mathbf{N}\pi A$.*

Beweis. Die von $\mathbf{N}A_\pi$ induzierten inneren Automorphismen von G lassen A_π fest. Sie lassen daher auch die subnormale Hülle $A_\pi^{::G}$ fest; diese stimmt nach 4. 2 mit πA überein.

Man kann 4.3 so aussprechen: Aus $B \subseteq \mathbf{N} A_\pi$ folgt $B \subseteq \mathbf{N} \pi A$. Hieraus kann man eine nützliche hinreichende Bedingung dafür gewinnen, daß die normale Hülle $B^G \subseteq \mathbf{N} \pi A$ ist:

S a t z 4. 4. *Sei* $A \in \mathbf{s} G$, $B \in \mathbf{u} G$. *Für jedes* $g \in G$ *gelte* $B \subseteq \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi)$. *Dann ist* $B^G \subseteq \mathbf{N} \pi A$.

B e w e i s. Für jedes $g \in G$ ist nach Voraussetzung $B^g \subseteq \mathbf{N}(A \cap G_\pi^g)$. Wendet man den vorigen Satz auf G_π^g anstelle von G_π an, so ergibt sich $B^g \subseteq \mathbf{N} \pi A$ für alle $g \in B$. Also ist $B^G \subseteq \mathbf{N} \pi A$.

Wir geben einige Beispiele für die Anwendung des Satzes 4. 4; dabei ist, wie stets in diesem Abschnitt, $A \in \mathbf{s} G$ vorausgesetzt.

4. 4. 1. *Es ist* $\mathbf{N s} G_\pi \subseteq \mathbf{N} \pi A$, *wenn* $\mathbf{N s} G_\pi = \bigcap \mathbf{N} S$ $(S \in \mathbf{s} G_\pi)$ *gesetzt wird.*

So gehört zum Beispiel das Zentrum jeder π-Hallgruppe von G zu $\mathbf{N} \pi A$. Wir heben den Fall $\pi = p$ hervor:

4. 4. 2. *Das Zentrum jeder p-Sylowgruppe von G liegt in* $\mathbf{N} p A$.

Tiefere Hilfsmittel benutzt die folgende Anwendung von 4. 4:

4. 4. 3. *Sei* $A \in \mathbf{s} G$. *Die p-Sylowgruppen von G seien regulär im Sinn von* HALL [1] *(hierfür genügt z. B., daß ihre Klasse kleiner als p ist). Die Ordnungen aller Elemente der p-Sylowgruppen von A mögen eine bestimmte Potenz* p^α *teilen, und es sei b ein Element von G, dessen Ordnung eine Potenz von p ist und das sich als* p^α*-te Potenz eines Elements von G darstellen läßt. Sei B die von b erzeugte zyklische Gruppe und* B^G *ihre normale Hülle. Dann ist* $B^G \subseteq \mathbf{N} p A$.

B e w e i s. Wir wählen eine p-Sylowgruppe G_p von G, die eine p^α-te Wurzel aus b enthält. In einer regulären p-Gruppe ist jede p^α-te Potenz mit jedem Element vertauschbar, dessen Ordnung p^α teilt [1, Th. 4.461]. Also ist $B \subseteq \mathbf{N}(A^g \cap G_p)$ für jedes $g \in G$. Nach 4.4 ist $B^G \subseteq \mathbf{N} p A$.

Eine andere Folgerung bezieht sich auf zwei Primzahlmengen π, ϱ:

S a t z 4. 5. *Der Index* $|G : \bigcap_{g \in G} \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi)|$ *sei durch keine Primzahl aus* ϱ *teilbar. Dann ist* $\varrho G \subseteq \mathbf{N} \pi A$.

B e w e i s. Sei $q \in \varrho$. Dann enthält $\bigcap \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi)$ eine q-Sylowgruppe B von G. Diese erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4. 4, also ist $B^G \subseteq \mathbf{N} \pi A$. Nach SYLOW ist $B^G = q G$. Also enthält $\mathbf{N} \pi A$ das Erzeugnis aller Gruppen $q G, q \in \varrho$; es stimmt nach 2. 5 mit ϱG überein.

Wir heben einen einfachen Sonderfall hervor:

4. 5. 1. *G enthalte eine* π*-Hallgruppe* G_π *und eine* ϱ*-Hallgruppe* G_ϱ, *die elementweise vertauschbar sind. Dann ist* $\varrho G \subseteq \mathbf{N} \pi A$ *für jedes* $A \in \mathbf{s} G$.

Nach 4.4.1 würde sogar schon die schwächere Voraussetzung $G_\varrho \subseteqq \mathbf{N}\mathfrak{s}G_\pi$ genügen.

Von nun an setzen wir statt $B \in \mathfrak{u}G$ schärfer $B \in \mathfrak{s}G$ voraus; dann ist $B_\pi = B \cap G_\pi$ erklärt. Wir untersuchen die Frage, wann $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$ ist. Notwendig hierfür ist $B_\pi \subseteqq \mathbf{N}A_\pi$, weil $B_\pi = \pi B \cap G_\pi$ und $A_\pi = \pi A \cap G_\pi$ ist (4.2). Man könnte vermuten, daß aus $B_\pi \subseteqq \mathbf{N}A_\pi$ umgekehrt auch $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$ folgt. Doch wird diese Vermutung durch das folgende Gegenbeispiel widerlegt; es zeigt sogar noch etwas mehr, nämlich daß aus $G_p \subseteqq \mathbf{N}A_p$ nicht notwendig $pG \subseteqq \mathbf{N}pA$ folgt.

B e i s p i e l 4.6. Sei C die Permutationsgruppe des Grades 6, die durch die drei Transpositionen (1 2), (3 4), (5 6) erzeugt wird. Sei G der Normalisator von C in der symmetrischen Gruppe des Grades 6; G ist eine transitive Gruppe der Ordnung 48. Sei A die von (1 2) erzeugte Gruppe der Ordnung 2 und G_2 die von C zusammen mit (3 5) (4 6) erzeugte Gruppe der Ordnung 16. Dann ist G_2 eine 2-Sylowgruppe von G, es ist $A \in \mathfrak{s}G$, ferner ist $A \cap G_2$ normal in G_2, aber die Gruppe $2A = A$ ist nicht normal in der Gruppe $2G = G$.

Um auf $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$ zu schließen, braucht man also stärkere Voraussetzungen als $B_\pi \subseteqq \mathbf{N}A_\pi$. Wir geben eine notwendige und hinreichende Bedingung an:

S a t z 4.7. *Seien $A, B \in \mathfrak{s}G$. Genau dann ist $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$, wenn $B \cap G_\pi \subseteqq$ $\subseteqq \mathbf{N}(A^b \cap G_\pi)$ gilt für jedes $b \in \pi B$.*

B e w e i s. (a) Sei $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$. Dann haben wir $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A^b$ für jedes $b \in \pi B$; schneiden wir mit G_π, so erhalten wir $\pi B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}(\pi A^b \cap G_\pi)$. Es ist $\pi B \cap G_\pi = B \cap G_\pi$, entsprechend für A^b, also ist $B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}(A^b \cap G_\pi)$.

(b) Ist die letzte Beziehung erfüllt, so haben wir für jedes $b \in \pi B$, wie 4.3 zeigt, $\pi B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}\pi A^b$, also $(\pi B \cap G_\pi)^{b^{-1}} \subseteqq \mathbf{N}\pi A$. Die auf der linken Seite stehenden Gruppen erzeugen, wenn wir b alle Elemente von πB durchlaufen lassen, die normale Hülle der π-Hallgruppe $\pi B \cap G_\pi$ in πB, das ist aber πB selbst (3.1). Folglich ist $\pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A$, wie behauptet.

Wir behandeln die entsprechende Frage für πB^G statt πB:

S a t z 4.8. *Seien $A, B \in \mathfrak{s}G$. Genau dann ist $\pi B^G \subseteqq \mathbf{N}\pi A$, wenn $B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi)$ gilt für alle $g \in G$.*

B e w e i s. Jede der nachstehenden Aussagen ist, wie man mit Hilfe von 4.7 sieht, der folgenden gleichwertig; dabei sollen g, b alle Elemente von $G, \pi B$ durchlaufen.

$$\pi B^g \subseteqq \mathbf{N}\pi A, \quad \pi B \subseteqq \mathbf{N}\pi A^g, \quad B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}(A^{gb} \cap G_\pi), \quad B \cap G_\pi \subseteqq \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi).$$

Wir heben den Sonderfall $B = G$ hervor:

4.8.1. *Genau dann ist* $\pi G \subseteq \mathbf{N}\pi A$, *wenn* $G_\pi \subseteq \mathbf{N}(A^g \cap G_\pi)$ *ist für jedes* $g \in G$.

Wir können diese Bedingung für alle $A \in \mathbf{s}G$ gleichzeitig formulieren, indem wir mit $\mathbf{s}_G G_\pi$ den Verband aller Durchschnitte $A \cap G_\pi$ bezeichnen ($A \in \mathbf{s}G$). Wir erhalten

4.8.2. *Genau dann ist* $\pi G \subseteq \mathbf{N}\pi A$ *für alle* $A \in \mathbf{s}G$, *wenn* $\mathbf{s}_G G_\pi \subseteq \mathbf{n}G_\pi$ *ist.*

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir eine hinreichende Bedingung dafür an, daß πA in G charakteristisch ist:

Satz 4.9. *Sei* $A \in \mathbf{s}G$. *Keine subnormale Untergruppe von* G_π *habe die Ordnung* $|A \cap G_\pi|$, *außer* $A \cap G_\pi$ *selbst. Dann ist* πA *eine charakteristische Untergruppe von* G. *Genauer gilt: Ist* $B \in \mathbf{s}G$ *und* $|\pi B|_\pi = |\pi A|_\pi$, *so ist* $\pi B = \pi A$.

Beweis. Es ist $|B \cap G_\pi| = |\pi B|_\pi = |A \cap G_\pi|$, also ist nach Voraussetzung $B \cap G_\pi = A \cap G_\pi$. Hieraus folgt nach 4.2 $\pi B = \pi A$.

§ 5. Verschärfung unter Konjugiertheitsvoraussetzungen für Hallgruppen

Die Sätze des vorigen Abschnitts lassen sich in dem Fall, daß π nur aus einer einzigen Primzahl besteht, verschärfen. Das beruht auf dem Satz von Sylow, nach dem je zwei p-Sylowgruppen konjugiert sind. Das Entsprechende für π-Hallgruppen gilt nicht allgemein. Wir können die erwähnten Verschärfungen aber trotzdem allgemein formulieren, indem wir die benötigten Konjugiertheitsvoraussetzungen von Fall zu Fall aussprechen. Die Existenz einer π-Hallgruppe von G setzen wir nur dort voraus, wo es ausdrücklich erwähnt ist.

Wir beginnen damit, die früher bewiesene Beziehung $\mathbf{N}A_\pi \subseteq \mathbf{N}\pi A$ zu einer Gleichung zu verschärfen:

5.1. *Sei* $A \in \mathbf{s}G$. *A enthalte eine* π-*Hallgruppe* A_π *mit der Eigenschaft, daß zu jedem* $g \in \mathbf{N}\pi A$ *ein* $a \in \pi A$ *existiert, für das* $A_\pi^g = A_\pi^a$ *ist. Dann ist* $\mathbf{N}\pi A = \pi A \cdot \mathbf{N}A_\pi = \mathbf{N}A_\pi \cdot \pi A$.

Beweis. Nach 4.3 ist $\mathbf{N}A_\pi \subseteq \mathbf{N}\pi A$, daher ist πA mit $\mathbf{N}A_\pi$ vertauschbar. Die beiden letzten Ausdrücke in 5.1 stimmen also überein, und es ist $\mathbf{N}A_\pi \cdot \pi A \subseteq \mathbf{N}\pi A$.

Es ist noch zu zeigen, daß jedes $g \in \mathbf{N}\pi A$ in der Form $g = ha$ mit $h \in \mathbf{N}A_\pi$, $a \in \pi A$ dargestellt werden kann. Zu diesem Zweck wählen wir $a \in \pi A$ derart, daß $A_\pi^g = A_\pi^a$ ist, und setzen $h = ga^{-1}$. Dann wird, wie gewünscht, $g = ha$ und $A_\pi^h = A_\pi$.

Es muß betont werden, daß die Konjugiertheitsvoraussetzung von 5.1 keineswegs immer erfüllt ist, selbst wenn A eine π-Hallgruppe A_π enthält. Zum Beispiel gibt es in der einfachen Gruppe G_{168} zwei nicht konjugierte Halluntergruppen der Ordnung 24, die durch einen Automorphismus der Ordnung 2 von G_{168} ineinander übergeführt werden können. Es erhebt sich daher die Frage nach Bedingungen, welche für die Existenz einer π-Hallgruppe mit der verlangten Eigenschaft hinreichen. Auf diese Frage gehen wir später ein (5.4, 5.5).

Wir heben den Sonderfall von 5.1 hervor, in dem π nur eine einzige Primzahl enthält:

5.1.1. *Sei $A \in \mathbf{s}G$, und A_p sei eine p-Sylowgruppe von A. Dann ist* $\mathbf{N}pA = pA \cdot \mathbf{N}A_p = \mathbf{N}A_p \cdot pA$.

Das wesentliche Hilfsmittel der weiteren Untersuchung ist der folgende auch für unendliche Gruppen G gültige Hilfssatz:

5.2. *Sei $A \in \mathbf{s}G$ und $A^G \cdot \mathbf{N}A = G$. Dann ist A normal in G.*

B e w e i s. Wir bilden die absteigende Reihe der normalen Hüllen von A, also die Gruppen $G_0 = G$, $G_1 = A^{G_0}$, $G_2 = A^{G_1}$ usw. Wegen der Subnormalität von A bricht diese Reihe nach endlich vielen, etwa r, Schritten mit $G_r = A$ ab. Nach unseren Voraussetzungen ist $G_1 = A^G = A^{\mathbf{N}A \cdot G_1} = A^{G_1} = G_2$, also ist $r = 1$, daher ist A normal in G.

Durch eine geringe Änderung des Beweises läßt sich, wie im Vorbeigehen erwähnt werden soll, 5.2 folgendermaßen verschärfen:

5.2.1. *Sei $A \in \mathbf{s}G$. Sei $G = G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r = A$ irgendeine von G nach A führende Normalkette kürzester Länge. Sei $G_1\mathbf{N}A = G$. Dann ist $r = 1$, also A normal in G.*

Nach diesen Vorbereitungen können wir eine Reihe notwendiger und hinreichender Bedingungen für Normalität von πA in G beweisen. Wir fassen sie zusammen zum

H a u p t s a t z 5.3. *Sei $A \in \mathbf{s}G$. In dem Normalteiler $H = \pi A^G$ von G existiere eine π-Hallgruppe H_π mit der folgenden Eigenschaft:* (*) *Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $h \in H$, für das $H_\pi^g = H_\pi^h$ ist.*

Wir setzen $A \cap H_\pi = A_\pi$. Dann sind je zwei der folgenden Aussagen gleichwertig:

(a) *πA ist normal in G.*

(b) *Wenn U eine Untergruppe von G derart ist, daß A_π^U eine π-Gruppe ist, so ist stets $A_\pi^U = A_\pi$.*

(c) *Es ist $\mathbf{N} H_\pi \subseteqq \mathbf{N} A_\pi$.*

(d) *Es gibt eine Gruppe $U \subseteqq \mathbf{N} H_\pi$ derart, daß $HU^G = G$ ist und daß aus $g \in G$ und $U^g \subseteqq \mathbf{N} H_\pi$ stets $U^g \subseteqq \mathbf{N} A_\pi$ folgt.*

Verfahren zur Konstruktion einer Gruppe H_π mit den benötigten Eigenschaften werden unter geeigneten Voraussetzungen in 5.4 und 5.5 angegeben.

B e w e i s. *Aus* (a) *folgt* (b). Sei πA normal in G, $U \in \mathbf{u} G$, A_π^U eine π-Gruppe. Dann ist $\pi A \cap A_\pi^U$ eine π-Untergruppe von A, welche die π-Hallgruppe A_π enthält; daher ist $\pi A \cap A_\pi^U = A_\pi$. Wegen $U \subseteqq \mathbf{N} \pi A \cap \mathbf{N} A_\pi^U$ ist $U \subseteqq \mathbf{N} A_\pi$, wie behauptet.

Aus (b) *folgt* (c). Man kann in (b) $U = \mathbf{N} H_\pi$ wählen.

Aus (c) *folgt* (d). Wir wählen $U = \mathbf{N} H_\pi$; dann ist $HU^G \supseteqq HU = H\mathbf{N} H_\pi$, und nach 5. 1, auf $H = \pi H$ statt A angewendet, stimmt $H\mathbf{N} H_\pi$ mit $\mathbf{N} H = G$ überein. Also ist $HU^G = G$, wie behauptet. Aus $g \in G$ und $U^g \subseteqq \mathbf{N} H_\pi$ folgt nach der Voraussetzung (c) auch $U^g \subseteqq \mathbf{N} A_\pi$.

Aus (d) *folgt* (a). Hierin liegt die Schwierigkeit. Sie wird durch 5. 2 überwunden. Nach 5.2 genügt es nämlich zu zeigen, daß $H\mathbf{N} \pi A = G$ ist; es genügt also (weil $U^g \equiv G \bmod H$ vorausgesetzt ist) zu zeigen, daß es zu jedem $g \in G$ ein $h \in H$ derart gibt, daß $U^{gh} \subseteqq \mathbf{N} \pi A$ ist. Hierfür genügt $U^{gh} \subseteqq \mathbf{N} A_\pi$. Das wiederum ist nach Voraussetzung (d) gesichert, wenn wir $U^{gh} \subseteqq \mathbf{N} H_\pi$ erreichen können. Nun gibt es aber nach der Voraussetzung (*) zu dem gegebenen g ein $h \in H$ derart, daß $H_\pi^{gh} = H_\pi$ ist. Für dieses h erhalten wir wegen $U \subseteqq \mathbf{N} H_\pi$ sofort $U^{gh} \subseteqq \mathbf{N} H_\pi^{gh} = \mathbf{N} H_\pi$. Damit ist der Beweis beendet.

Wir kommen nun zu der bisher aufgeschobenen Frage, wann Hallgruppen mit den benötigten Eigenschaften existieren. Wir geben zwei Sätze mit hinreichenden Bedingungen an.

5. 4. *Sei $A \in \mathbf{s} G$ und $H = \pi A^G$. A enthalte eine π-Hallgruppe A_π mit einem Sylowturm (d. h. A_π besitze eine Normalkette, in der die Faktorgruppen je zweier benachbarter Glieder zu Sylowgruppen von A isomorph sind). Dann enthält H eine π-Hallgruppe H_π mit Sylowturm, für welche $A \cap H_\pi = A_\pi$ ist.*

Jede π-Hallgruppe H_π von H, welche einen Sylowturm besitzt, erfüllt die Konjugiertheitsbedingung 5. 3 *.

B e w e i s. Das Erzeugnis von subnormalen Untergruppen, von denen jede einen π-Hallgruppe mit Sylowturm (und zwar immer zur selben Anordnung der Primzahlen in der zugehörigen Normalkette) enthält, enthält ebenfalls eine π-Hallgruppe mit einem Sylowturm zur gleichen Anordnung der Primzahlen [6, Satz 3. 1]. Wendet man diesen Satz auf die sämtlichen Konjugierten von A in G an, so ergibt er die Existenz einer π-Hallgruppe H_π von H, welche einen Sylowturm mit der gleichen Anordnung wie A_π enthält. Nun ist $A \cap H_\pi$ eine π-Hallgruppe von A, welche einen Sylowturm von derselben Anordnung enthält wie die π-Hallgruppe A_π. Zwei solche Hallgruppen sind nach HALL [2, Th. A1] in A konjugiert. Wir können also $A_\pi = H_\pi$ annehmen, indem wir notfalls H_π durch eine geeignete konjugierte Gruppe ersetzen. Damit ist der erste Teil von 5.4 bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus dem oben erwähnten Satz von HALL.

5.5. *Sei* $A \in \mathfrak{s} G$ *und* $H = \pi A^G$. *Es sei wenigstens eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(a) *Jede Kompositionsfaktorgruppe von* A *enthält eine nilpotente* π*-Hallgruppe.*

(b) A *enthält für die zu* π *komplementäre Primzahlmenge* π' *eine normale* π'*-Hallgruppe* K *derart, daß* K *oder* A/K *auflösbar ist.*

Behauptung: A *enthält eine* π*-Hallgruppe. Zu jeder* π*-Hallgruppe* A_π *von* A *gibt es eine* π*-Hallgruppe* H_π *von* H *mit* $A \cap H_\pi = A_\pi$. *Jede* π*-Hallgruppe* H_π *von* H *erfüllt die Konjugiertheitsbedingung* 5.3*.

Beweis. (a) H ist das Erzeugnis der subnormalen Untergruppen πA^g $(g \in G)$. Daher ist jede Kompositionsfaktorgruppe von H nach 2.4 zu einer geeigneten Kompositionsfaktorgruppe von πA isomorph, enthält also eine nilpotente π-Hallgruppe. Hieraus folgt nach HALL [2, Cor. D5. 1], daß H eine π-Hallgruppe H_π enthält und daß jede π-Untergruppe von H in einer passenden Konjugierten H_π^h enthalten ist. Wenn also A_π eine π-Hallgruppe von A ist (solche gibt es, z. B. $A \cap H_\pi$), so gibt es ein $h \in H$ mit $A_\pi \subseteq H_\pi^h$, also können wir durch Änderung der Bezeichnung $A_\pi \subseteq A \cap H_\pi$ erreichen. Da A_π und $A \cap H_\pi$ dieselbe Ordnung haben (auch $A \cap H_\pi$ ist nach 2.7 eine π-Hallgruppe von A), folgt $A_\pi = A \cap H_\pi$, wie gewünscht. Die gleiche Schlußweise zeigt, daß jede π-Hallgruppe von H die Bedingung 5.3* erfüllt.

(b) Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A = \pi A$ ist, denn die Voraussetzungen über A übertragen sich unmittelbar auf πA. Wir zeigen zunächst, daß H eine normale π'-Hallgruppe L enthält, und zwar die Gruppe $L = \bigcup K^g$ $(g \in G)$. Jedes K^g ist eine subnormale π'-Untergruppe von G (sogar von H wegen $K \subseteq A = \pi A$). Daher ist L nach 2.4 eine π'-Gruppe. Da andererseits $K = \pi' A$ ist, haben wir nach 2.6

$$L = \bigcup \pi' A^g = \pi' \bigcup A^g = \pi' H,$$

also ist L eine (und zwar die einzige) normale π'-Hallgruppe von H.

Jeder Kompositionsfaktor von H stimmt nach 2. 4 mit einem Kompositionsfaktor einer Gruppe A^g überein, d. h. mit einem von A. Nach Voraussetzung (b) sind entweder alle durch Primfaktoren aus π' teilbaren Kompositionsfaktoren von A Primzahlen, oder alle durch Primfaktoren aus π teilbaren Kompositionsfaktoren von A sind Primzahlen. Das Gleiche gilt dann für H. Also ist entweder L oder H/L auflösbar. Wir fassen zusammen: H erfüllt die Voraussetzung, die in 5. 5b für A formuliert war. Daraus folgt nach HALL [2, Th. D6, D7]: Es gibt in H eine π-Hallgruppe H_π derart, daß jede π-Untergruppe von H in einer passenden Konjugierten von H_π liegt. Nun können wir den Beweis wie im Fall (a) beenden.

Zum Schluß soll die Anwendung des Hauptsatzes an zwei Beispielen erläutert werden, deren einfachster Sonderfall ($\pi = p$) schon in der Einleitung erwähnt worden ist (1. 1).

5. 6. *Die subnormale Untergruppe A von G erfülle wenigstens eine der drei folgenden Bedingungen* (i)—(iii)*:*

(i) *A enthält eine π-Hallgruppe A_π mit Sylowturm,* (ii) 5. 5a, (iii) 5. 5b.

In den Fällen (ii) *und* (iii) *bezeichne A_π eine willkürlich gewählte π-Hallgruppe von A (solche gibt es nach* 5. 5*).*

Behauptung: Genau dann ist πA eine charakteristische Untergruppe von G, wenn für jede Gruppe Γ von Automorphismen von G, für welche A_π^Γ eine π-Gruppe ist, $A_\pi^\Gamma = A_\pi$ gilt.

Beweis. Man kann den Hauptsatz 5. 3 auf das Holomorph von G anwenden, d. i. die zerfallende Erweiterung von G mit der Gruppe aller Automorphismen von G. Für das U von 5. 3b ist Γ einzusetzen.

5. 7. *Sei $A \in \mathbf{s} G$. A erfülle wenigstens eine der beiden Bedingungen* 5. 5a, 5. 5b. *In G gebe es eine π-Hallgruppe G_π. Wir bilden $A \cap G_\pi = A_\pi$. Dann sind je zwei der folgenden drei Aussagen gleichwertig:*

(a) *πA ist normal in πG.*

(b) *Aus $g \in \pi G$ und $A_\pi \subseteq G_\pi^g$ folgt $A_\pi \in \mathbf{n} G_\pi^g$.*

(c) *Aus $g \in \pi G$, $A_\pi \subseteq P \in \mathbf{n} G_\pi$ und $P \in \mathbf{n} G_\pi^g$ folgt $A_\pi \in \mathbf{n} G_\pi^g$.*

Beweis. Aus (a) folgt (b). Denn aus $\pi G \subseteq \mathbf{N} \pi A$ und $A_\pi \subseteq G_\pi^g$ folgt $G_\pi^g \subseteq \pi G \subseteq \mathbf{N} \pi A$ und $A_\pi = \pi A \cap G_\pi^g$, also $G_\pi^g \subseteq \mathbf{N} A_\pi$.

Aus (b) folgt (c). Das ist trivial.

Aus (c) folgt (a). Wir können $G = \pi G$ annehmen. Sei $H = \pi A^G$. Wir setzen $H \cap G_\pi = H_\pi$. Dann ist H_π eine π-Hallgruppe von H. Ferner ist H_π normal in G_π, weil H normal in G ist. Nach 5. 5 ist die Konjugiertheitsbedingung 5. 3* erfüllt, und es ist $A \cap H_\pi = A_\pi$. Ferner ist die Voraussetzung

5. 3d erfüllt, wenn wir $U = G_\pi$ wählen: Es ist $U^G = \pi G = G$; und $U^g \subseteq \mathbf{N} H_\pi$ bedeutet $H_\pi \in \mathbf{n}\, G_\pi^g$, also gilt nach der Voraussetzung 5. 7c, wenn wir sie auf $P = H_\pi$ anwenden, $A_\pi \in \mathbf{n}\, G_\pi^g$, das heißt aber $U^g \subseteq \mathbf{N} A_\pi$. Der Hauptsatz kann also angewendet werden und ergibt $\pi G \subseteq \mathbf{N} \pi A$, wie behauptet.

Literatur

[1] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **36** (1933), 29—95.

[2] P. Hall, Theorems like Sylow's, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **6** (1956), 286—304.

[3] H. Wielandt, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, *Math. Zeitschr.*, **45** (1939), 209—244.

[4] H. Wielandt, Sylowgruppen und Kompositionsstruktur, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg*, **22** (1958), 215—228.

[5] H. Wielandt, Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen, *Math. Zeitschr.*, **69** (1958), 463—465.

[6] H. Wielandt, Sylowtürme in subnormalen Untergruppen, *Math. Zeitschr.*, **73** (1960), 386—392.

(Eingegangen am 30. April 1960)